冬令营 Day 2 讲题

Tangjz

中国梦游协会

2019 年 1 月 21 日

情况概览

Problem	Solved (Div. 1)	Solved (Div. 2)
A. Erase Numbers I	—	33/422
B. Erase Numbers II	—	125/1204
C. Fibonacci Strikes Back	0/0	0/2
D. Honeycomb	0/4	0/0
E. Power of Function	1/18	0/11
F. Square Subsequences	0/6	0/11
G. Cosmic Cleaner	51/167	0/0
H. Quicksort	3/7	69/208
I. Linear Congruential Generator	—	0/0
J. Square Substrings	0/2	0/0
K. Sticks	25/370	12/387
L. Pyramid	3/37	0/15
M. Erase Nodes	0/1	—
N. Erase Numbers III	3/43	—
O. Routes	0/2	—

A. Erase Numbers I

- 最大化剩余数字，则需最小化删除数字的长度
- 枚举这样的两个数字，需要判断至多三段字符串拼接后的大小
- 后缀数组？

A. Erase Numbers I

- 最大化剩余数字，则需最小化删除数字的长度
- 枚举这样的两个数字，需要判断至多三段字符串拼接后的大小
- 后缀数组？
- 删除数字对字符串偏移量的影响已知，预处理 LCP 即可

B. Erase Numbers II

- 枚举留哪两个数字即可

B. Erase Numbers II

- 枚举留哪两个数字即可
- 枚举后面那个数就好了

C. Fibonacci Strikes Back

- 首先求出 $F_m \equiv F_{F_n} \pmod{10^k}$ 的通解 $m \equiv m' \pmod{L(10^k, P)}$
- 然后求出 $F_n \equiv m' \pmod{L(10^k, P)}$ 的通解 $n \equiv n' \pmod{L(L(10^k, P))}$

C. Fibonacci Strikes Back

- 首先求出 $F_m \equiv F_{F_n} \pmod{10^k}$ 的通解 $m \equiv m' \pmod{L(10^k, P)}$
- 然后求出 $F_n \equiv m' \pmod{L(10^k, P)}$ 的通解 $n \equiv n' \pmod{L(L(10^k, P))}$
- 解数不超过 32，原因？
- 可以从 $k-1$ 的解推到 k 的解，且解数不会爆炸式增长

C. Fibonacci Strikes Back

- 首先求出 $F_m \equiv F_{F_n} \pmod{10^k}$ 的通解 $m \equiv m' \pmod{L(10^k, P)}$
- 然后求出 $F_n \equiv m' \pmod{L(10^k, P)}$ 的通解 $n \equiv n' \pmod{L(L(10^k, P))}$
- 解数不超过 32，原因？
- 可以从 $k-1$ 的解推到 k 的解，且解数不会爆炸式增长
- 需要注意 $F_{F_n} < 10^{k-1}$ 但在模 10^k 意义下有前导零的情况

D. Honeycomb

- 每个点度数不超过 6 的两两最小割
- 不存在特殊点到特殊点的路径经过非特殊点，故答案不超过 6
- 建最小割树，求两两路径最小值

E. Power of Function

- $f^m(n) = 1$ 时 $(m+1)$ 等于 n 在 k 进制下的各位之和加上长度减一
- 使用数位 DP 的技巧划分区间分别构造最大 m 和相应唯一解，合并即可

F. Square Subsequences

- 枚举 len 考虑 $p_{\frac{m}{2}} \le len < p_{\frac{m}{2}+1}$ 的平方串子序列，转化为求两个字符串的最长公共子序列
- 令 $dp(i,j)$ 表示串 S 前 i 位与串 T 前 j 位的最长公共子序列长度，若 $S_i = T_j$ 则
  $dp(i,j) = dp(i-1,j-1)+1$，否则
  $dp(i,j) = \max(dp(i-1,j), dp(i,j-1))$
- $dp(i-1,j-1) \le dp(i,j-1)$, $dp(i-1,j) \le dp(i,j)$, $dp(i,j) \le dp(i-1,j-1)+1$，记

G. Cosmic Cleaner

- 球体积公式：$V = \frac{4\pi}{3}R^3$
- 球缺体积公式：$V = \pi H^2(R - \frac{H}{3})$

H. Quicksort

- 归纳证明，执行 Quick(p, l, r, h) 前，$p[\lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor]$ 取值为 $p[l], p[l+1], \cdots, p[r]$ 中第 k 大的概率均等，可以推出下一层执行 Quick(p, l, k - 1, h - 1) 的概率均等
- 逆序对的期望只与区间长度和深度有关
- $dp(len, 1) = \frac{len(len+1)}{4}$,

  $dp(len, h) = \frac{\sum_{k=1}^{len} dp(i-1, h-1) + dp(len-i, h-1)}{n}$

I. Linear Congruential Generator

- $X_0, X_1, \cdots, X_m$ 中必然存在 $X_i = X_j$，且对于非负整数 k 有 $X_{i+k} = X_{j+k}$，故 X 的循环节长度不超过 m
- 在循环节前可能存在一部分不属于循环的内容
- $X_i \bmod X_j + 1 = X_i - \left\lfloor \frac{X_i}{X_j+1} \right\rfloor$
- $\mathcal{O}(\sum_{i=1}^{m} \frac{m}{i}) = \mathcal{O}(m \log m)$

J. Square Substrings

- 枚举平方串的长度 $2d$，在字符串上每隔 d 长度设置一个观察点，相邻两点间求后缀的最长公共前缀和前缀的最长公共后缀，如果覆盖长度达到 $2d$，则说明检查到一系列长度相等的平方串 (l, r, len)，对询问 (L, R) 产生的贡献是

  $$[len <= R - L + 1](\max(r - R + 1, 0) - \max(l - L, 0))$$

- 关于平方串的数量是 $\mathcal{O}(n)$ 的需要一系列证明，这里略去

K. Sticks

- 枚举大小 12 的集合划分成 4 个元素大小 3 的集合所有方案，$\frac{12!}{3!3!3!3!4!} = 15400$
- 每个集合的贡献可以预处理

L. Pyramid

- 枚举一个顶点 (x, y)，枚举极角在 $[0, \frac{2\pi}{3})$ 的向量 (a, b) 表示一条边
- 若 (a, b) 有解，则解数为 $\binom{r-\max(a,b)-|a-b|+1}{2} - \binom{l-|a-b|}{2}$
- 对有解的 (a, b) 进行求和，答案是关于某些值的四次函数

M. Erase Nodes

- 树上的版本：(u, v) 产生贡献的概率是 $\frac{1}{dist(u,v)+1}$
- 外向树上的版本：(u, v) 产生贡献时至少有一条路径
- 不走环的部分：树分治 $+$ NTT
- 走环的部分：区间分治 $+$ NTT

N. Erase Numbers III

- 最大化剩余数字，则需最小化删除数字的长度
- 删除数字对字符串偏移量的影响已知，预处理 LCP
- $k = t + 1$ 最优解一定可以从 $k = t$ 的最优解得到

O. Routes

- 考虑团与团之间的最短路，团内点到其他团的距离不超过该最短路长度加一
- 点到点走团：枚举中间团，最短路长度只有 $2k$ 种，利用高维前缀和统计每种可能的长度对应的点对数量
- 点到点不走团：枚举铁路线