Summer 2018 Selection Contest 7 Solution

By Reconquista @ ZJU

May 6, 2018

Expected Difficulty

Easy: C
Medium: $A \approx G < E \approx F < B < D$

A. Exceptionally Easy Sum

本题有很多种做法，比赛时有些同学采用了比标程复杂度优秀的做法，大家可以互相参考和学习。这里介绍标程的做法。首先，可以发现答案显然是一个$m+1$次多项式。设其为$P(n) = a_{m+1}n^{m+1} + a_m n^m + ... + a_1 n + a_0$.

我们可以将n从1取到$m+2$，暴力算出$P(n)$的值，于是就有了$m+2$个方程。由于模数是质数，所以逆元存在，于是可以比较方便地用高斯消元求解这一方程组即可解出待定系数$a_0, ..., a_{m+1}$,至此多项式被确定，代入题目中所给的n即可算出答案。

时间复杂度:$O(m^3)$.

Prepared by Jiangzhe Yan

B. Array Query

考虑把询问分成两类。记$max(ai) = A$. 对于 $y > \sqrt{A}$的询问，暴力查询 $a[l...r]$之间

有多少个 $x, x+y, x+2y, x+3y...$ 每个y最多查询$O(\sqrt{A})$次，查询可以用二分。复杂度$O(Q\sqrt{A}\log N)$.

对于$y \le \sqrt{A}$的询问。考虑把询问按y分类，y相同的一类，显然最多有$O(\sqrt{A})$类。对于每一类，先把$a[1...n]\ mod\ y$, 问题转化为查询 $a[l...r]$之间有多少个值等于x。查询同样用到二分。复杂度也是$O(Q\sqrt{A}\log N)$.

时间复杂度:$O(Q\sqrt{A}\log N)$.

Prepared by Zhenwei Liu

C. Merging Numbers

结论：只要把$max(a[i], a[i+1])$加起来输出即可。

证明：
1.存在性：每次找到最小的，往它旁边并一下即可。
2.最优性：考虑数字$a[i]$和数字$a[i+1]$。我们知道，在合并过程中，必然存在一次合并，它是跨越i和$i+1$的。因为越合并数字越大，所以$max(a[i], a[i+1])$一定是跨越这条线的最优解。

时间复杂度:$O(N)$.

Prepared by Shibiao Jiang

D. Temperature Changes

我们先提出做法。在线段树中维护每个城市的温度和unhappiness。每次修改时可以使用如下方法暴力：先令$i = L$，然后利用线段树在$O(\log N)$内找到最大的j使得i到j的温度都相等，然后对i到j之间的城市一起修改(修改温度和相应增加unhappiness)，再令$i = j+1$，重复，直到达到R为止。询问时直接在线段树上询问区间unhappiness之和即可。

下面证明这种做法的时间复杂度。假设某次修改操作处理了x段温度相同的城市，则显然复杂度为$O(x\log N)$,注意到这样的一次操作之后,新的状态中温度相同的城市段数会至少减少$x-3$,也可以理解为每次操作删除原来的x段后增加了3段。刚开始有N段，所以M次操作后最多会有$N+3M$段，于是总复杂度就是$O((N+3M)\log N) = O((N+M)\log N)$.

时间复杂度:$O((N+M)\log N)$

Prepared by Jiangzhe Yan

E. Lucky Girls

基础的数位DP题。显然可以小小容斥一下转化为算$1 \sim R$的答案减去$1 \sim (L-1)$的答案。

我们从最高位依次DP过去，设$f[i][j][k][l]$表示处理到第i位，之前一个luck number的位置是j，目前是否有至少一组pair了，而且当前这个数是否已经严格小于上界的方案数。这样复杂度就是$O(N^2*10)$的。可以用一些技巧去掉10，不过没什么意义。

至于有$T=5000$组数据，不能每次跑满。我们可以小小的记忆化一下。设$g[i][j][k]$表示还剩下i个数字没填，之前一个luck number的位置是j，目前是否有至少一组pair了的方案数，且目前已经严格小于上界的方案数（注意这一维是确定的）。我们算F的时候把这个记忆化一下。每次计算一个答案的时候，所有严格小于的枚举都会被记忆化掉，均摊$O(N^2*10)$，每次取到和上界相等的时候继续往下一位做，单组Case的复杂度是$O(N)$的。
时间复杂度:$O(N^2*10+TN)$.

Prepared by Shibiao Jiang

F. Printing Document

显然一种最优策略是按照字典序打印字符串，所以先把给的字符串排序(直接排序，比较时暴力比较两个字符串即可。设L为所有字符串长度之和，则使用归并排序的复杂度为$O(L\log N)$(事实上快排也能通过))。

然后令$f[i][j]$表示决策了前i个字符串，选了j个的最小费用。为了转移的效率我们需要预处理字符串之间两两的最长公共前缀长度(类似后缀数组中求height的方法)。然后DP就可以做到$O(N^2M)$的复杂度了。

时间复杂度:$O(N^2M + L\log N)$.

Prepared by Jiangzhe Yan

G. Tree Spliting

树形DP。$f[i]$表示以i为根，且i的父亲在不同集合的方案数。$g[i]$表示以i为根，且i的父亲在相同集合的方案数。则

$$g[i] = \prod(f[v] + g[v])$$
$$f[i] = \prod(f[v] + g[v]) - \prod(f[v])$$

其中v是i的子节点。
时间复杂度:$O(N)$.

Prepared by Zhenwei Liu