

Summer 2018 Selection Contest 1 Solution

By Reconquista @ ZJU

March 18, 2018 (Version 2)

Expected Difficulty

Easy: $D < B$

Medium: $C < A \approx F$

Hard: E

A. Integer Sequence

$F[i][j]$ 表示和为 i , 最后一位是 j 的方案数。转移的时候枚举前一位是什么数:

$$F[i][j] = \sum_x (F[i-j][x]) \quad (1 \leq x \leq m, |x-j| \leq d)$$

由于 s 可以达到 10^{18} , 需要用矩阵快速幂加速, 从转移方程可以看出第一维需要保留 i 之前的 m 个状态, 所以矩阵大小为 $m^2 \times m^2$ 。

时间复杂度: $O(m^6 \log(s))$

Prepared by Zhenwei Liu

B. Numbers on a Tree

首先把给的分数约分成最简。如果此时分母不是2的幂, 则无解, 否则有解。我们可以假设原树是满二叉树, 显然答案不变, 此时约分后的分子就等于该满二叉树底层1的个数。要使出现深度最小的1, 显然可以把底层的1全放到最左边的点。设约

分后分母等于 2^x ,分子的二进制表示有 y 位, 则答案是 $x - y + 1$ 。

时间复杂度: $O(\log(B))$

Prepared by Jiangzhe Yan

C. Defense of the Empire

本题有多种做法, 例如树形DP、点分治等。这里介绍一种简单的贪心做法。先任意选一个点为根, 然后将每个点按照深度从大到小排序, 然后依次考虑每个点。如果当前考虑的点的孩子都没有放置军队, 则将一个军队放置在该点的父亲上(如果当前点为根, 则放在它自己上)。

时间复杂度: $O(n)$

Prepared by Jiangzhe Yan

D. Russian Calendar

签到题。要求根据给定的日历算某年的第256天是几月几日。只需讨论是不是闰年即可, 注意转换发生的1918年要特判。

时间复杂度: $O(1)$

Prepared by Jiangzhe Yan

E. CJB's Villas

对集合分块, $size[i] > \sqrt{n}$ 的称为大集合, 否则称为小集合。显然大集合不会超过 \sqrt{n} 个。

我们先预处理出 $init[j][i]$ 表示大集合 j 和某个集合 i 的交集元素个数。

每次如果修改一个小集合 i , 那么就暴力把里面的元素 $+k$ 。注意到这可能会变动大集合里的信息; 那么我们再枚举每一个大集合 j , 把它的 $ans[j]$ 加上 $k * init[j][i]$

如果修改一个大集合 i , 直接对 $upd[i] += k$

如果询问一个小集合 i :

- 1.先算改动小集合的贡献：循环当前小集合的点，累加它们的值。
 - 2.算改动大集合的贡献：枚举每一个大集合 j ，将 $upd[j] * init[j][i]$ 加入答案。
- 如果询问一个大集合 j ：
直接将 $ans[j]$ 和 $upd[j] * size[j]$ 加起来输出即可。
时间复杂度： $O(n\sqrt{n})$

Prepared by Shibiao Jiang

F. Mega Graph

显然，新图中的两个点 (a, b) 和 (c, d) 能互相到达，当且仅当在原图中存在从 a 到 c 和从 b 到 d 的长度相同的路径。由于是无向图，所以可以把路径长度任意加2，所以我们只关心长度的奇偶性。假设原图连通，则如果原图是二分图，则答案为2，否则为1。原图不连通时，则需要对每对连通分量两两分别计算答案贡献相加，注意孤立的一个顶点要特判。用dfs求出孤立顶点个数 r 、二分图的连通分量个数 q 、不是二分图的连通分量个数 p ，即可算出答案：

$$ans = p^2 + 2q^2 + 2pq + 2Nr - r^2$$

时间复杂度： $O(M)$

Prepared by Jiangzhe Yan

Version History

- 2 - Fixed an error in problem A
- 1 - Fixed an error in problem F
- 0 - Initial release