

牛客网暑期ACM多校训练营(第四场)

zimpha

A. Ternary String

题意:

给个长度为 n 的三进制串, 有这样一个操作: 在每个2后面插入一个1, 每个1后面插入一个0, 然后删掉第一个字符。问多少次操作后, 变成空串

$n \leq 1e5$

A. Ternary String

- 操作分析
 - 遇到0, 直接删除, 操作次数+1
 - 遇到1, 考虑之前已经操作了x次, 那么这个1后面已经多生出了x个0。这个时候需要再经过x+2次操作才能删完
 - 遇到2, 考虑之前已经操作了x次, 然后打个表可以发现, 之后还需要经过 $3 * (2 ^ (x + 1) - 1) - x$ 次操作才能全部删完
- 可见需要计算 $a * 2^x \bmod (10^9 + 7)$, 于是也得计算 $x \bmod \phi(10^9+7)$, 考虑到x可能也是之前某些 2^x 的组合, 因此还得算 $x \bmod \phi(\phi(10^9+7))$, 依次类推, $\phi(\phi(\phi(10^9+7)))$, ..., $\phi^k(10^9+7)$ 都得计算。
- 另外考虑到若干次后, mod一定是一个2的倍数, 可以提前算好答案, 来优化。

B. Interval Revisited

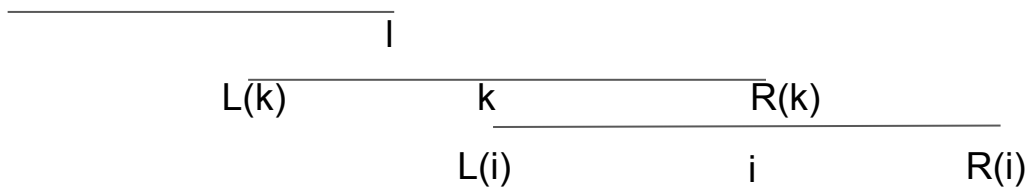
题意:

给出 n 个带权区间, 选择若干区间, 覆盖 $[1, m]$, 使得每个位置被覆盖权值和的最大值最小

$n, m \leq 2000$

B. Interval Revisited

- ❖ 一个显然的结论: 每个位置最多被两个区间覆盖
- ❖ 所有区间按照右端点从小到大排序
- ❖ $dp(i, j)$ 表示第 i 个区间必选, 上一次被覆盖一次的位置是 j , $[1, j]$ 覆盖权值和最大值的
最小值
 - $dp(i, j) = \min(\max(dp(k, l), w(i) + w(k)) \mid R(k) + 1 \geq L(i) \text{ and } L(k) - 1 \leq l < L(i))$
 - j 和 $R(k)$ 有关, 显然第二维就是个区间最值, 线段树优化下



C. Chiaki Sequence Reloaded

题意:

求下面数列前n项和

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} & n \geq 2 \end{cases}$$

$n \leq 1e18$

C. Chiaki Sequence Reloaded

- 下面这个式子很容易从定义得出来

$$a(n) - a(\lfloor n/2 \rfloor) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \equiv 0 \text{ or } n \equiv 3 \pmod{4}; \\ -1 & \text{if } n \equiv 1 \text{ or } n \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

- 令 n 的二进制表示为 $b(m)b(m-1)\dots b(0)$, 且 $b(m)=1$
 - $p(n)$ 是 $b(i)=b(i+1)$ 的 i 个数, $q(n)$ 是 $b(i) \neq b(i+1)$ 的 i 个数
 - 显然 $a(n)=p(n)-q(n)$
- 之后考虑数位dp计算 $p(n)-q(n)$
 - $dp(i, j, x, y)$ 表示前 i 位和为 j , 最后一位是 x , 和 n 大小关系是 y 的方案数。

D. Another Distinct Values

题意:

给出 n , 构造 $n \times n$ 的矩阵, 每个元素是 $0, -1, 1$, 使得每行每列的sum互不相同

$n \leq 200$

D. Another Distinct Values

- 总和是 $[-n, n]$, 共 $2n+1$ 种, 令 $r(1), r(2), \dots, r(n), c(1), c(2), \dots, c(n)$ 是行列的和, 显然 x_{jb} 排列下可以得到 $r(1), r(2), \dots, r(k) \geq 0, c(1), c(2), \dots, c(n-k) \geq 0$

$$\sum_{i=1}^n |r_i| + \sum_{j=1}^n |c_j| \geq \sum_{r=-n}^n |r| - n = n^2.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |r_i| + \sum_{j=1}^n |c_j| &= \sum_{i=1}^k r_i - \sum_{i=k+1}^n r_i + \sum_{j=1}^{n-k} c_j - \sum_{j=n-k+1}^n c_j = \\ &= \sum_{i \leq k} a_{ij} - \sum_{i > k} a_{ij} + \sum_{j \leq n-k} a_{ij} - \sum_{j > n-k} a_{ij} = \\ &= 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n-k} a_{ij} - 2 \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=n-k+1}^n a_{ij} \leq 4k(n-k). \end{aligned}$$

D. Another Distinct Values

- $n^2 \leq 4k(n-k)$, $(n-2k)^2 \leq 0$, 于是 $n=2k$, 是个偶数
- 考虑如下构造法, 从 2×2 出发, 依次扩展2层

1	0
1	-1

$n \times n$				1	1
				-1	-1
				1	1
				-1	-1
1	-1	1	-1	1	0
1	-1	1	-1	1	-1

E. Skyline

题意:

平面上 n 个点, 每个点出现概率是 p_i , 求期望被支配的点数

$n \leq 1e5$

E. Skyline

- 同一位置上的点可以先把概率合并掉, $p = 1 - \text{prod}(1-p_i)$
- 枚举点*i*和*j*, 他们一定出现, 考虑贡献
 - $x(i) < x(j)$, $y(i) > y(j)$, 支配点数是 $(x(j)-x(i)) * y(j)$
 - 概率是 $p(i) * p(j) * \text{一堆其他数}$
 - $x = x(i)$, $y > y(i)$ 的
 - $x \geq x(j)$, $y > y(j)$ 的
 - $x(i) < x < x(j)$, $y > y(j)$ 的
- 考虑分治, 这些东西都是可以用个线段树维护下, 然后用个区间求和计算

F. Mirror

题意:

给个 n 个点的凸多边形, 和一面镜子, 要把 m 个物品从 a 搬到 b , 每次只能搬一个物品, 过程中一定要看见物品(可以在镜子中看见)求最短路。

$n \leq 10, m \leq 100$

F. Mirror

- 四种情况需要考虑
 - 普通有障碍最短路, $m=1$
 - 只需要看见起点的最短路(第一个物品)
 - 起点和终点都要被看到的最短路(从 b 往 a 走的时候)
 - 只需要看见终点的最短路(最后一个物品)
- 直接看到的范围和从镜子里看到的范围都是一个最多有 n 个点简单多边形
- 抠出关键点: 原来的点, 加 n^2 条线段交点
- 判定路径合法性: 整条线段在多边形内 \Rightarrow 求线段在多边形内部部分 $O(n)$
- 复杂度 $O(n^5)$

G. Maximum Mode

题意:

n个数, 删m个数, 使得剩下数里面众数最大

$m < n \leq 1e5$

G. Maximum Mode

- 枚举答案, 考虑需要删几个数才能使之变成众数
 - 出现次数多余它的都要被删到次数比它小
 - 剩下的随便删

H. Double Palindrome

题意:

长度为 n 的字符串, 可以交换两个位置, 使得最后是双回文, 求交换方案

$n \leq 1e5$

H. Double Palindrome

- 枚举 i , 要求 $s[1..i]$ 和 $s[i+1..n]$ 都是回文串
 - 两边都不是回文串: 需要从左右各 选个位置交换
 - 两边都是回文串: 只要是相同的位置都可以交 换, 用个flag记住
 - 其中一个是回文串, 另一个不是: 另一个 选两个位置交换
 - 还需要考虑奇回文串的中心也可以用来交 换
- 除去相同元素的交换, 其他交换次数是 $O(n)$ 的, 于是暴力拿set去重
- 大概得写个manacher和后缀数组

I. Permutation

I. Permutation

题意:

给出 n 对三元组 $(a[i], b[i], c[i])$, 保证 $3n$ 个数互不相同且在 1 到 $3n$ 之内。构造一个排列使得 $b[i], c[i]$ 出现在 $a[i]$ 后面, 并且 $\sum |p[i] - p[i-1]|$ 最小

$n \leq 1e65$

J. Hash Function

题意:

给出一个linear probing hash table, 求一个字典序最小的插入序列, 或者判断不合法

$$n \leq 2e5$$

J. Hash Function

- 从hash表里能得出的信息：
 - 一个区间里面的数要比一个数插入的早
- 如果一定有解
 - 根据这些信息可以建出一个图, 然后拓扑排序可以得到答案
 - 线段树优化建图: 边数 $O(n^2) \Rightarrow O(n)$
- 如何判不合法:
 - x最终插入到j, 应该要插到 $i=x \bmod n$, 如果 $[i..j-1]$ 里面有-1,
 - 拓扑排序出现环