

OICamp 2016 Day 3

郭晓旭

icpc-camp.org

2016 年 7 月 13 日

GCDLCM

40% 的做法

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{lcm}(i, j) [\text{gcd}(i, j) \leq a] \\ &= \sum_{d=1}^a \sum_{i=1}^{n/d} \sum_{j=1}^{m/d} dij [\text{gcd}(i, j) = 1] \\ &= \sum_{d=1}^a \sum_{i=1}^{n/d} \sum_{j=1}^{m/d} dij \sum_{k | \text{gcd}(i, j)} \mu(k) \end{aligned}$$

GCDLCM

40% 的做法

$$\begin{aligned} &= \sum_{d=1}^a \sum_{i=1}^{n/d} \sum_{j=1}^{m/d} dij \sum_{k|\gcd(i,j)} \mu(k) \\ &= \sum_{d=1}^a d \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) k^2 S(\lfloor \frac{n}{dk} \rfloor) S(\lfloor \frac{m}{dk} \rfloor) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} S(\lfloor \frac{n}{p} \rfloor) S(\lfloor \frac{m}{p} \rfloor) \sum_{1 \leq d \leq a, d|p} \frac{p^2}{d} \mu(\frac{p}{d}) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} S(\lfloor \frac{n}{p} \rfloor) S(\lfloor \frac{m}{p} \rfloor) f_a(p) \end{aligned}$$

GCDLCM

40% 的做法

$$\sum_{p=1}^{\infty} S(\lfloor \frac{n}{p} \rfloor) S(\lfloor \frac{m}{p} \rfloor) f_a(p)$$

其中

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$f_a(p) = \sum_{1 \leq d \leq a, d|p} \frac{p^2}{d} \mu\left(\frac{p}{d}\right)$$

GCDLCM

100% 的做法

$$\sum_{p=1}^{\infty} S(\lfloor \frac{n}{p} \rfloor) S(\lfloor \frac{m}{p} \rfloor) f_a(p)$$

$\lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ 只有 $O(\sqrt{n})$ 个值

设 $p \in [e_1, e_2), [e_2, e_3), \dots$ 时, $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor, \lfloor \frac{m}{p} \rfloor$ 是常数

则

$$= \sum_{i=1}^{\infty} S(\lfloor \frac{n}{e_i} \rfloor) S(\lfloor \frac{m}{e_i} \rfloor) (T_a(e_i) - T_a(e_{i+1}))$$

其中 $T_a(l) = \sum_{p=l}^{\infty} f_a(p)$

GCDLCM

100% 的做法

$$\sum_{p=1}^{\infty} S(\lfloor \frac{n}{p} \rfloor) S(\lfloor \frac{m}{p} \rfloor) f_a(p)$$

$\lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ 只有 $O(\sqrt{n})$ 个值

设 $p \in [e_1, e_2), [e_2, e_3), \dots$ 时, $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor, \lfloor \frac{m}{p} \rfloor$ 是常数

则

$$= \sum_{i=1}^{\infty} S(\lfloor \frac{n}{e_i} \rfloor) S(\lfloor \frac{m}{e_i} \rfloor) (T_a(e_i) - T_a(e_{i+1}))$$

其中 $T_a(l) = \sum_{p=l}^{\infty} f_a(p)$

GCDLCM

100% 的做法

$$f_a(p) = \sum_{1 \leq d \leq a, d|p} \frac{p^2}{d} \mu\left(\frac{p}{d}\right), T_a(l) = \sum_{p=l}^{\infty} f_a(p)$$

$$f_a(p) = \begin{cases} f_{a-1}p + \frac{p^2}{a} \mu\left(\frac{p}{a}\right) & a \mid p \\ f_{a-1}p & a \nmid p \end{cases}$$

树状数组维护 T . $O((q\sqrt{m} + m \log m) \log m)$

平面图

30% 的做法

维护生成树 T

- ▶ 删除非树边时，不改变连通性
- ▶ 删除树边时，暴力重构 $O(n)$

$O(n^2 + q)$.

平面图

100% 的做法

考虑树上删边、连通性维护

启发式分解

删除边时，修改较小的子树的连通块编号

如何找到较小的子树？

同时 BFS

平面图

100% 的做法

考虑树上删边、连通性维护

启发式分解

删除边时，修改较小的子树的连通块编号

如何找到较小的子树？

同时 BFS

平面图

100% 的做法

如果可以判断割边

原图的割对应偶图的环

如果两侧的面属于同一个连通快, 则该边是割边

对偶图加边、连通性询问

并查集 $O(n \log n + q)$

平面图

100% 的做法

如果可以判断割边

原图的割对应偶图的环

如果两侧的面属于同一个连通快, 则该边是割边

对偶图加边、连通性询问

并查集 $O(n \log n + q)$

平面图

100% 的做法

如果可以判断割边

原图的割对应偶图的环

如果两侧的面属于同一个连通快, 则该边是割边

对偶图加边、连通性询问

并查集 $O(n \log n + q)$

组合数

测试点 1, 2

```
$ factor 614889782588491410
```

```
614889782588491410: 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 \  
31 37 41 43 47
```

Lucas

测试点 3

离线 $O(T + \text{mod})$

$O(T \text{mod})$ 四线程可能跑得完 (

测试点 3

离线 $O(T + \text{mod})$

$O(T_{\text{mod}})$ 四线程可能跑得完 (

测试点 4, 5

4 类似 3

计算 $1 \times 3 \times 7 \times \cdots \times (2n + 1) \pmod{2^k}$

考虑展开

$(2 \times 1 + 1) \times (2 \times 2 + 1) \times (2 \times 3 + 1) \cdots \times (2n + 1)$
 $\pmod{2^k}$

形如 $2 \times$ 小于 k 项, 设有 m 项

等价于计算 $\{1, 2, \dots, n\}$ 所有 m 元子集的乘积之和

测试点 4, 5

4 类似 3

计算 $1 \times 3 \times 7 \times \cdots \times (2n + 1) \pmod{2^k}$

考虑展开

$(2 \times 1 + 1) \times (2 \times 2 + 1) \times (2 \times 3 + 1) \cdots \times (2n + 1)$
 $\pmod{2^k}$

形如 $2 \times$ 小于 k 项, 设有 m 项

等价于计算 $\{1, 2, \dots, n\}$ 所有 m 元子集的乘积之和

测试点 4, 5

4 类似 3

计算 $1 \times 3 \times 7 \times \cdots \times (2n + 1) \pmod{2^k}$

考虑展开

$(2 \times 1 + 1) \times (2 \times 2 + 1) \times (2 \times 3 + 1) \cdots \times (2n + 1)$
 $\pmod{2^k}$

形如 $2 \times$ 小于 k 项, 设有 m 项

等价于计算 $\{1, 2, \dots, n\}$ 所有 m 元子集的乘积之和

测试点 4, 5

1. 插值 $2m$ 次多项式
2. 分治

测试点 4, 5

设 $f_m(n)$ 表示 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的所有 m 元子集的乘积

$$f_m(2n) = \sum_{i=0}^m f_{m-i}(n) f_i(n) \left(\sum_{j=0}^i \binom{i}{j} n^{i-j} f_j(n) \right)$$

$$O(T(m \log n)^2)$$

谢谢

本文件位于这里¹右侧的 Files List

¹<https://chat.icpc-camp.org/group/camp-summer-2016>