

青岛 2017 现场赛

题目简析

Problem A. Battle in Two Pairs of Heroes

不难看出是一个动态规划。

但如果直接以维护四个英雄的健康值为状态，程序的耗时会非常苛刻。

不妨考虑只维护其中三个英雄的健康值，并维护现在轮到哪一个玩家，而记录的信息不是谁赢谁输，而是如果此刻先手玩家要赢，那么第四个英雄最多（最少）应该有多少健康值。

Problem B. Chenchen, Tangtang and ZengZeng

只需要判断所有行，所有列以及对角线是否是相同的字符即可。

Problem C. Collecting Cents

关于时间 y 一步一步来思考。

对于每一个时间结点维护下来所有可能的当前状态。注意到（1）任何一笔钱不可能存超过 d 年，否则就可以先存 d 年，再存余下的年份且总不会更差；（2）其次不可能同时有两笔钱被存储相同的年份（同时存进去又同时取出来），这样可以合在一起存储；（3）当然也不可能有一笔钱的金额超过 d 。

此外还有（4）对于任意一笔被存储的钱（记存进去 a 分钱，存 b 年）如果可以被拆成两次存入（先用 a 分钱存 u 年，取出后再连本带利存储 $b-u$ 年）且结果不劣，则一定不会一次性存进去（一次性存 b 年）。

最后（5）对于 y 时刻的任意两种状态（注意这里的状态包括当前手头金额，以及之后 d 年会取出来的钱）如果一种时时刻刻都比另外一种优秀，则筛去后者。

这样每次由前一年的情况筛选得到后一年的情况，就可以完成这一题。

Problem D. Enclosure of Land and Water

不难想到，在陆地上任意位置如果轨迹光滑，则一定曲率相同；同样在水中也是这样。

那么有哪些位置可能轨迹不光滑呢？除了水陆分界位置，只有在起点的位置会出现不光滑的奇点。

如果这种奇点不存在，只需要枚举两个分界位置之间的距离，以及两段曲率大小（两者都满足单峰性质），需要满足陆地部分的圆弧最远位置超过 d 。

如果存在，不难发现轨迹关于起点和水陆分界线的垂线对称，做法类似上述情况。

这一题有一个很容易犯的错误认识，以为答案一定是关于起点的垂线对称，实际上不一定。

Problem E. Floppy Cube

Polya 计数问题，需要想办法找到对称群。

这里的对称群有三个生成元，且群不是非常大，可以通过搜索找到整个群。群中每一个元素都是 S_{30} 中的元素，可以用大小为 30 的数组来表示一个置换。很多元素的循环个数相同，可以预处理算出来并去重以加速多组数据的计算。

Problem F. Hex Game

注意到如果有一方赢了，不妨让游戏一直进行下去直到整个棋盘填满，这不会影响双方的胜负，因为不可能同时存在从上到下的路径和从左到右的路径。

那么问题可以改成随机填入若干个白棋（填多少可以提前统计出来，不妨记为要填入 k 个），有多少可能存在一条从上往下的白色连通路径。这一部分可以用动态规划来实现。对于一条上下的分界线（比如一条折线，前 $i-1$ 行以及第 i 行的前 j 个格子在这条折线的上方），维护上面的格子之间的连通情况，是否与上边界连通，以及已经用掉了多少个白棋。

这一题有一个潜在的有用的结论，在棋盘填满的一瞬间游戏一定已经有一方获胜，不可能出现平局。所以上述的动态规划只需要做一次。

Problem G. Pythagoras, One More Time

我们知道 Pythagoras 三元对树，提供了三个整系数线性变换 A , B 和 C ，作用在 Z^3 关于 $\{x^2+y^2-z^2\}$ 的商空间上。同时注意到 A , B 和 C 的逆存在且也是整系数的。那么对于充分大的三元对 (x,y,z) 满足 $x^2+y^2=z^2-7$ 来说，这三个逆变换中就一定有一个可以带它回到一个相对较小的三元对 (x',y',z') 。

反过来思考，只要找到那些较小的（小到无法通过上述三个逆变换找到更小的合法三元对）三元对，就可以遍历出来所有可行的解。时间复杂度 $O(\text{Ans})$ 。

最后注意，只需要预处理做一次就可以了。

Problem H. Spacecraft

需要维护出来飞船任意时刻的坐标系统。

因为所有操作都是定轴旋转，所以可以用定轴旋转矩阵来实现。

但其实可以更简单一些，因为维护的坐标系统是 3 个互相垂直的单位向量，所以所有操作都只是以其中一个轴来旋转，进而可以变成二维的向量旋转情况。

Problem I. The Squared Mosquito Coil

可以先预处理一个空白的图纸，然后在地图上搜索需要填充的位置。

Problem J. Suffix

考虑子问题：在后若干个字符串中分别选取后缀，使得拼接起来的字典序最优。

对于后 i 个字符串来说，最优答案中后 $i-1$ 个字符串的部分一定就是后 $i-1$ 个字符串的最优解。

于是可以从后向前依次找后若干个字符串的最优解。对于每一个字符串则枚举其所有后缀，并尝试和后面字符串的最优解拼接。

Problem K. Our Journey of Xian Ends

本题题面非常繁琐，但其实基本上没有一句废话。

题目刻画的看似非常多的可能方案，却因为一些刻意说明的限制，使得合法的方案变得很少了。

最后真正可行的方案只有两条：

- (1) 西安飞虹桥，虹桥飞青岛，青岛飞浦东；

(2) 西安飞浦东，浦东地铁去虹桥，虹桥飞青岛再飞回虹桥，再地铁回浦东。
于是可以建立一个两个源点两个汇点的费用流模型，其中两个源点的流量限制分别为 1 和 2，
而两个汇点的流量限制分别为 2 和 1。

以上是对青岛 2017 现场赛所有题目（共计 11 题）的简要解析，2017 年 11 月 10 日记。