标记

V指T中所有点构成的点集

(u,v)是u和v之间的无向路径

$V(u,v)$指u和v之间的无向路径上的点构成的点集

$d(u,v)$指u和v之间的最短距离

定理

对于一棵树，设直径是(s,t)，对任意顶点x，$max(d(x,y))(y \in V) = max(d(x,s),d(x,t))$

证明

我们不妨设$d(x,s) < d(x,t)$

- 若$x \in V(s,t)$，不妨设$y \in V - V(s,t)$使得$d(x,y) > d(x,t)$（因为如果$y \in V(s,t)$，则结论是显然的）。则有$d(s,t) = d(s,x) + d(x,t) < d(s,x) + d(x,y) = d(s,y)$。如此说来$(s,t)$就不是直径了，所以对任意$y \in V$都有$d(x,y) \leq d(x,t)$。
- 若$x \notin V(x,y)$，我们同样试图反证结论成立。
  - 假设路径中存在$x \overset{*}{\to} u(u \in V(s,t))$那么显然继续$x \overset{*}{\to} u \overset{*}{\to} t$会比较优。所以试图寻找一条更长的路径失败。
  - 若路径中不存在$x \overset{*}{\to} u$，设该路径为(x,y)，$V(x,y) \bigcap V(x,u) = V(x,v)$，由条件知，$d(x,t) < d(x,y)$，展开得$d(v,y) > d(v,u) + d(u,t)$，简单放缩一下$d(v,y) + d(v,u) > d(u,t)$，两边同时加上$d(s,u)$则有$d(s,y) > d(s,t)$，这样的话又是显然不成立。

Q.E.D.


x
v
y
s
u
t