

旋转染色的计数问题:

$$n \text{ 个元素间的置换 } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

置换群 $G = (a_1 a_2 \dots a_s)$ 其中 $a_1 a_2 \dots$ 为不同置换方案

$D(a_i)$ 表示在置换 a_i 下不发生改变的元素个数

Burnside引理

$$\text{不同的组合状态数 } L = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^n D(a_i)$$

对于每一个置换方案 a_i , 定义其循环节数为 g_i , 循环节数表示该置换关系由几个循环节构成, 如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (13)(25)(4)$$

则上式中循环节数为3

Polya原理

设 G 是 p 个元素的置换群, 用 m 种颜色涂染 p 个元素, 则不同的染色方案数

$$L = \frac{1}{|G|} (m^{c(g_1)} + m^{c(g_2)} + \dots + m^{c(g_s)})$$

其中 $G = \{g_1 \dots g_s\}$, $c(g_i)$ 为置换 g_i 的循环节数