

Contest 12 Solution

By ACE

Overview

- 3001 Pan's Labyrinth [凸包+极角排序] **
- 3002 Build the Park III [模拟] ***
- 3003 Greedy Driver [最短路] **
- 3004 Jump and Kill [圆与圆求交] *
- 3005 New Governor's Problem [枚举] **
- 3006 Party [贪心] *
- 3007 Bellywhite's Algorithm Homework
[根据顶点度数分类维护] *****

By ZHU, Jiale

3001 PAN'S LABYRINTH

题意

- 给定一个点集，其中任意不共线三点可组成一个三角形，每个三角形有一个最大的高，求所有可以组成的三角形中最大的高长度

做法

- 求凸包，最大高的顶点一定在凸包上。
- 然后对一个点 a ，将 a 与其他点相连组成的边按角度顺时针排序（ $n \log n$ ）（这些边有共同的顶点 a ）然后依次处理这些边，对第一条边先 $O(n)$ 扫描出这条边左手侧与右手侧凸包上离这条边距离最大的点 $left$ 和 $right$ ，对接下来的边可以看出他们的 $left$ 和 $right$ 都是顺时针方向单调移动的，维持 $left$ 处于直线左手侧， $right$ 处于右手侧，扫描完这个点发出的所有边。

做法

- 对每个点都进行这样的操作，复杂度是 $(n^2 \log n)$ 对于凸包上的边作为底边时只有左手侧，特殊处理下。

By LI, Tierui

3002 BUILD THE PARK III

Build the Park III

- 题目很长，专业名词比较多，但其实对于那些首字母大写的单词其实没有必要知道它的含义。能仔细看完就能发现这是个水题。
- 题目大意：
- 求 资产负债率 = 负债 / 资产
- 资产 = 流动资产 + 固定资产 + 无形资产
- 负债 = 流动负债 + 投资贷款 + 流动资金贷款
- 其中 流动资产 和 流动负债 直接给出

题目大意

- 固定资产 需要考虑 折旧，无形资产 需要考虑 摊销。其实就是 固定资产 和 无形资产 每年会减少。
- 题目给出的计算方法是：每年以相同值减少，并在计算期最后一年的年末减少至零。
- 折旧 和 摊销 的计算都发生在年末。

题目大意

- 对于所有贷款：
- 利息在年末计算。
- 给出的利率是 年利率，计息周期也是年。
- 计算复利。
- 要求每年等额本利和偿还。
- 如果当年决定借款，发生在年初，且仅有一次。
- 如果当年需要还款，发生在年末，且仅有一次。

题目大意

- 对于投资贷款：
- 在建设期每年年初都有借款。
- 在运营期第一年年末开始还款。
- 给出一个还款年限，从运营期第一年年年初开始计。
- 对于流动资金贷款：
- 运营期初始几年有借款。
- 在借款当年年末开始还款。
- 给出一个还款年限，从借款当年年初开始计。
- 每笔借款单独还款。

做法

- 理解题目意思之后，逐年模拟即可，计算当年年末的固定资产余值，无形资产余值，未偿还投资贷款，未偿还流动资金贷款。
- 注意年初和年末的不同。
- 计算等额本利和还款额，可推数学公式为：

$$A = \frac{i(i+1)^n}{(i+1)^n - 1} P$$

- 其中，A为年值，P为现值，i为利率，n为还款年限。还是比较容易推的。
- 用二分法也是可以做的。

By LI, Huang

3003 GREEDY DRIVER

Greedy Driver 题意

- 一个有向图，司机接到任务要从起点开到终点。开始时油箱是满的，每段路耗油也已知。
- 图中有一些点是可以加油的，可以在其中任意的点加任意次油，加多少也任意，加了以后不能超过油箱容量。
- 图中还有些点可以卖油，每个点收购的价格可能不一样且已知，只能卖一次。
- 求在完成的前提下（开到终点），最多能赚多少钱？

Greedy Driver 分析

- 因为只能卖一次油，很容易想到要枚举在哪个点卖。
- 要使得答案尽可能大，卖的油要尽可能多，意味着到这个卖出的点的时候油箱内剩余的油尽可能多。
- 卖的时候要保证卖完后还能开到终点。

Greedy Driver 解法

- 从起点开始用类似SPFA的方法，更新“到这个点的最大油量”记为 $a[i]$
- 从终点开始逆向SPFA，更新“从这个点到终点的最小耗油”记为 $b[i]$
- 那么答案就是 $\max((a[i] - b[i]) * price[i])$
- 如果一个点既是加油点又是卖油点，进行特判，可以赚到 $c * price[i]$ ， c 为油箱容量
- 其他特殊情况（到不了终点，边的消耗大于油箱容量等）

By ZHANG, Wen

3004 JUMP AND KILL

Description

- 二维平面上有 N 个怪物，DZH可以跳到任意一个地点然后释放 M 次边长为 A 的正方形能量波，被能量波覆盖的怪物会被消灭。DZH释放的能量波可以是任何角度的。问一次最多可以杀多少怪物。

Solution

- 由于 $M \geq N$ ，所以实际上DZH释放的M次能量波实际上可以将以DZH为圆心，以 $A/\sqrt{2}$
- 为半径的园内的怪物全部杀掉。于是题目可以转化成以所有怪物为圆心以 $A/\sqrt{2}$ 为半径画圆，求最多有多少圆可以同时覆盖一个点。
- 被多个圆同时覆盖的区域必然由圆弧和圆与圆的交点围成。所以可以枚举所有圆与圆的交点，然后依次判断他们最多可以被多少个园覆盖。
- 注意可能出现多点共圆的情况。
- 时间复杂度 $O(n^3)$

By TANG, Yajie

3005 NEW GOVERNOR'S PROBLEM

• 题目大意：有 N 个点， M 条无向边。每条边有一个流量上限 C_i 。现在可以删去最多 K 条边。求删去边之后网络中最大流最小能为多少。

• $N \leq 10$

• $M \leq 1000$

• $C_i \leq 10^8$

- 每一种最大流对应一种最小割，跨S集与T集的边在最小割中。
- 枚举删去边之后求得的最大流所对应的割集。 2^N
- 跨S集与T集的边最多能够被删去K条。
- 选择权值前K大的边删去，则剩下的边权和最小。即所对应的删去边后的最大流最小。
- 时间复杂度 $O(M\log M + 2^N * M)$
- 70组数据

By ZHU, Jiale

3006 PARTY

做法

- 贪心
- 方法就是不断把认识的人少于 x 的人排除掉，最后剩下的人就是最大方案
- 证明：认识人数少于 x 的人一定不可能被邀请，所以排除他们没有问题。剩下的人每个人都至少认识 x 人，所以肯定可以被邀请

By YU, Xiaoyao

**3007 BELLYWHITE'S
ALGORITHM HOMEWORK**

题目大意

- 给出 N 个点， M 条无向边，每条边有一个边权。无自环，可能会有重边。
- 给出 Q 个操作：
 - $Q X$: 查询满足条件的边权和
 - $Q A$: 输出所有边权和
 - $Q +$: 输出所有正权值的边权和
 - $Q -$: 输出所有负权值的边权和
 - $C X$: 修改 X 点所连的每条边的边权取相反数。

预处理

- 将顶点分为两类：
 1. 度 $\leq \sqrt{M}$
 2. 度 $> \sqrt{M}$
- 对于每个点 x ，维护 $\text{sum}[0][x]$ 和 $\text{sum}[1][x]$ ，分别表示属于它的负（正）边的边权和。
- 对于每条边，判断它属于哪一个点来维护：
 - 只有一个端点的度 $> \sqrt{M}$ \rightarrow 属于度较大的点
 - 两个端点的度都 $> \sqrt{M}$ \rightarrow 属于任意一个点
 - 两个端点的度都 $\leq \sqrt{M}$ \rightarrow 由一个全局变量维护

修改操作

- 修改度 $\leq \sqrt{M}$ 的点：
 - 相连的每条边都不属于它维护
 - 直接枚举每条相连的边，维护对应点的 sum 值
- 修改度 $> \sqrt{M}$ 的点：
 - 某些属于它维护，某些不属于
 - 对于属于它维护的，直接维护
 - 对于不属于它维护的，枚举每条不属于它维护的边，维护对应点的 sum 值

查询操作

- 将全局变量 `sum` 值 + 所有度 $> \sqrt{M}$ 的点的 `sum` 值

时间复杂度分析

- 度 $> \sqrt{M}$ 的点的数量必然 $\leq \sqrt{M}$
 - 反证法可证
- 查询操作: $O(\sqrt{M})$
- 修改操作
 - 度 $< \sqrt{M}$ 的点: $O(\text{该点的度数})$
 - 由于该点度 $< \sqrt{M}$, 故复杂度是 $O(\sqrt{M})$
 - 度 $\geq \sqrt{M}$ 的点: $O(\text{不属于该点维护的边数})$
 - 对于每一条边都属于一个度 $> \sqrt{M}$ 的点或者属于一个全局变量, 而 (度 $> \sqrt{M}$ 的点数量 + 1) $\leq \sqrt{M} + 1$, 故复杂度是 $O(\sqrt{M})$