E Move to Baggage Office

3077 Move to Baggage Office

Time Limit: 1 Second Memory Limit: 32768 KB

Author: **LI, Yaochun**

帮运价值v_i为i包至少需要a_i的体力，会用去$a_i - b_i$的体力，已知初始体力s，求最大可能获得的价值。

比赛时的一个坑，只有不到10%的AC率。

这不是一个单纯的背包问题，不能直接dp，因为这样不满足无后效性。不过这种问题可以通过按一定的顺序排序后再dp来解决。

按$a-b$升序排列是不对的，也是WA得最多的。反例：

```
1
8 3
1 3 2
2 5 3
4 8 5
正确答案是7
错误输出为4
```

按a降序排也是错的。反例：

```
1
22 2
1 21 18
2 20 19
正确答案为3
错误输出为2
```

正错的策略是**按b降序排**。当然没有反例⋯⋯

> 顺带一提如果不确定如何排序，可以ws地用用n种排序各求一个解，再返回其中最大的。然后就应该能AC了。-,-

错误方法就不讨论了，下面证明按b降序排可以得到正确结果。显然按b降序排得到的结果本身就是一个可能的解，所以不大于最优解；另一方面，任意一种合法的方案，都对应有一个集合相同，顺序按b降序的方案（待证），即求得的结果不小于最优解。所以求得结果就是最优解。对于第二部分的证明，不失一般性，我们假设一个最优方案就是依次搬运1至n号包。

Theorem E.1. 若排列$1, 2, \cdots, n$满足

$$s - \sum_{i=1}^{k-1} (a_i - b_i) \geq a_k, \quad k = 1, 2, \cdot, n a_i \geq b_i, \quad k = 1, 2, \cdot, n$$

那么按b降序排后得到的排列$p_1, p_2, \cdots, p_n$也满足该性质，即有

$$s - \sum_{i=1}^{k-1} (a_{p_i} - b_{p_i}) \geq a_{p_k}, \quad k = 1, 2, \cdot, n$$

Proof. 若排列$1, 2, \cdots, n$已经是按b降序排列的，结论显然成立。

否则，$\exists j$ s.t. $b_j < b_{j+1}$，考虑交换j和$j+1$的新排列。同原来的排列比较可知在$k \neq j, k \neq j+1$时性质显然成立。记$s' \triangleq s - \sum_{i=1}^{j-1} (a_i - b_i)$，我们只需要证明

$$\left\{ \begin{array}{rcl} s' & \geq & a_j \\ s' - (a_j - b_j) & \geq & a_{j+1} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} s' & \geq & a_{j+1} & (1) \\ s' - (a_{j+1} - b_{j+1}) & \geq & a_j & (2) \end{array} \right.$$

由$s' \geq (a_j - b_j) + a_{j+1} \geq 0 + a_{j+1} \geq a_{j+1}$，(1)式得证。根据上述假设$b_j < b_{j+1}$，所以

$$\begin{array}{rrcl} & s' - (a_j - b_j) & \geq & a_{j+1} \\ \Leftrightarrow & s' - a_{j+1} + b_j & \geq & a_j \\ \Rightarrow & s' - (a_{j+1} - b_{j+1}) & > & a_j \end{array}$$

(2)式得证。所以交换j和$j+1$的新排列也满足定理中的性质。

只要序列不是按b降序排列的我们就可以不断交换排列中的两个数，而保持定理中的性质不变。最后，这就像冒泡排序一样，我们可以把序列按b降序排列而保持性质不变。也就是说对任意一个可行的方案，在按b降序排列后，依然是可行的。

□