设$f(n,m)$为周瑜手中有 n 张牌，牌堆花色总共有 m 种时的期望游戏盘数，则当 n 为非负整数，m 为大于 1 的整数时有如下公式：

$$f(n,m)=\begin{cases} n(n+1) & m=2 \\ \dfrac{m}{(m-2)^2}\left[\dfrac{1}{(m-1)^n}+(m-2)n-1\right] & m>2 \end{cases}$$

证明如下：

对于任意一局，周瑜猜中花色的概率设为$\frac{1}{m}$，则没猜中的概率为设为$\frac{m-1}{m}$。

设$h(i)$为周瑜最大生命值为 n，花色总数 m 确定时的周瑜当前血量为 i 时能玩的游戏盘数的期望值，则我们可以得到如下关系式：

$$\begin{cases} h(i+1)=\dfrac{1}{m}h(i+2)+\dfrac{m-1}{m}h(i)+1 & 0\le i<n-2 \\ h(i+1)=\dfrac{1}{m}h(i+1)+\dfrac{m-1}{m}h(i)+1 & i=n-1 \end{cases}$$

将其转换为递推式的形式：

$$\begin{cases} h(i)=\dfrac{m}{m-1}h(i+1)+\dfrac{-1}{m-1}h(i+2)-\dfrac{m}{m-1} & 0\le i<n-2 \\ h(i)=h(n)-\dfrac{m}{m-1} & i=n-1 \end{cases}$$

从递推式可以看出，如果我们知道$h(n)$的值的话，那么就可以通过第二条式子得到$h(n-1)$，然后再通过第一条的二项递推式逐步得到$h(n-2),h(n-3),\dots,\mathrm{h}(0)$，由递推式两项系数的和为一可知，如果把$h(i)$表示成$h(n)$的函数的话，$h(n)$对应的系数始终为 1，即$h(i)=h(\mathrm{n})+\mathrm{b(i)}$，为了方便计算，设$\mathrm{p}=\frac{m}{m-1}$，$\mathrm{q}=\frac{-1}{m-1}=1-\mathrm{p}$，则上式经简化变为

$$\begin{cases} b(i)=pb(i+1)+qb(i+2)-p & 0\le i<n-2 \\ b(n-1)=-p,\ b(n)=0 \end{cases}$$

可是现在的情况是我们仅能知道$h(0)=0$，所以$h(0)=h(\mathrm{n})+\mathrm{b}(0)=0$，$h(n)=-\mathrm{b}(0)$，设$g(i)=-\mathrm{b}(\mathrm{n}-\mathrm{i})$。此时 g(n)的含义就是当周瑜初始血量为总血量 n 时，对于给定的 m 值，能玩的游戏的期望盘数，也就是 f(n, m)，即题目所求的值。

$$\begin{cases} g(i)=pg(i-1)+qg(i-2)+p & 2\le i \\ g(0)=0,\ g(1)=p \end{cases}$$

设$g(i)$的生成函数为$G(x)$，则根据上式有

$$\frac{G(x)-px}{x^2}=p\frac{G(x)}{x}+qG(x)+\frac{p}{1-x}$$

由$\mathrm{q}=1-\mathrm{p}$可将其简化为下式

$$G(x)=\frac{px}{(1-\mathrm{x})^2[1-(\mathrm{p}-1)\mathrm{x}]}$$

下面算出 p 的取值范围

$$1=\frac{\infty}{\infty-1}<p=\frac{m}{m-1}\leq\frac{2}{2-1}=2$$

当$\mathrm{p}=2$时，$\mathrm{p}-1=1$，与所以要分情况分解部分分式：

$$\begin{cases}\mathrm{G(x)}=\dfrac{\mathrm{px}}{(1-\mathrm{x})^3} & ,\mathrm{p}=2\\ \mathrm{G(x)}=\dfrac{\mathrm{p}}{(\mathrm{p}-2)^2}\left[\dfrac{\mathrm{p}-1}{1-(\mathrm{p}-1)\mathrm{x}}+\dfrac{-1}{1-\mathrm{x}}+\dfrac{2-\mathrm{p}}{(1-\mathrm{x})^2}\right] & ,1<p<2\end{cases}$$

将生成函数展开即可以得如下结果：

$$g(n)=\begin{cases}n(n+1) & p=2\\ \dfrac{p}{(p-2)^2}\left[(p-1)^{n+1}-1+(2-p)(n+1)\right] & 1<p<2\end{cases}$$

将$\mathrm{p}=\frac{m}{m-1}$带入上式，即可得到此文开头说提到的答案

$$f(n,m)=\begin{cases}n(n+1) & m=2\\ \dfrac{m}{(m-2)^2}\left[\dfrac{1}{(m-1)^n}+(m-2)n-1\right] & m>2\end{cases}$$